Instabilité spectrale semiclassique pour des opérateurs non-autoadjoints I: un modèle

Mildred Hager

INSTABILITÉ SPECTRALE SEMICLASSIQUE POUR DES OPÉRATEURS NON-AUTOADJOINTS I: UN MODÈLE

par

Mildred Hager

Résumé. — Dans ce travail, nous considérons un opérateur différentiel simple ainsi que des perturbations. Alors que le spectre de l'opérateur non-perturbé est confiné à une droite à l'intérieur du pseudospectre, nous montrons pour les opérateurs perturbés que les valeurs propres se distribuent à l'intérieur du pseudospectre d'après une loi de Weyl.

Abstract. — In this work, we consider a simple differential operator as well as perturbations. While the spectrum of the unperturbed operator is confined to a line inside the pseudospectrum, we show for the perturbed operators that the eigenvalues are distributed inside the pseudospectrum according to a bidimensional Weyl law.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 34E10, 47G10, 47A75.
Mots clefs. — Pseudospectre, perturbation, opérateurs non-autoadjoints.

Introduction

Il est bien connu que pour des opérateurs non-autoadjoints, la norme de la résolvante peut être très grande même loin du spectre. Par exemple, dans la théorie des opérateurs elliptiques non-autoadjoints, ceci constitue une difficulté théorique importante (voir par exemple [**1**]). Le sujet a regagné de l'actualité avec des travaux sur les résonances d'une part, et d'autre part par des contributions dans les mathématiques appliquées et l'introduction par N. Trefethen de la notion de pseudospectre [**15**]. Parmi les nombreuses autres contributions, on peut citer S. Reddy, P. Schmid et D. Hennningson [**7**] qui ont appliqué cette notion à l'opérateur d'Orr-Sommerfeld, et ont mis en évidence numériquement l'instabilité spectrale.

E.B. Davies a étudié des opérateurs de Schrödinger à potentiel complexe ([**3**]), et a construit des quasimodes prouvant que le pseudospectre est dans ce cas beaucoup plus grand que le spectre. M. Zworski ([**18**]) a observé que la condition d'existence de ces solutions locales asymptotiques s'interprète comme une condition de commutateur de Hörmander. Ceci a servi comme point de départ pour généraliser ce résultat à des opérateurs pseudodifférentiels (dans le cadre semiclassique) et à plusieurs dimensions par N. Dencker, J. Sjöstrand et M. Zworski ([**11**]). Voir aussi le travail récent de L. Trefethen ([**17**]).

De manière équivalente, le pseudospectre peut s'introduire comme une région d' « instabilité spectrale » (voir [**4**]). Ceci explique l'importance de cette notion pour des calculs numériques involvant des matrices non-normales. Notamment pour des matrices de Toeplitz, intervenant lors de discrétisations d'opérateurs différentiels, le pseudospectre semble pouvoir jouer un role important dans l'étude de la stabilité du problème d'évolution discret correspondant ([**16**]). Davies ([**5**]) propose une approche directe des problèmes d'évolution utilisant le pseudospectre, et les travaux antérieurs de Tang-Zworski ([**13**]) et de Burq-Zworski ([**2**]) illustrent bien les difficultés pseudospectrales pour les problèmes d'évolution. M.Zworski observe aussi que lors du calcul numérique des valeurs propres de certains opérateurs différentiels dans le cadre semiclassique, il semble y avoir un phénomène de migration des valeurs propres vers le bord du pseudospectre, dans la limite semiclassique([**19**]). Ce phénomène nous a motivé d'entreprendre une étude des perturbations d'opérateurs non-autoadjoints.

Nous allons examiner ici le comportement spectral d'un opérateur-exemple sous des perturbations à noyau oscillant, et nous allons trouver une asymptotique de Weyl pour le nombre de valeurs propres de l'opérateur perturbé dans un domaine à l'intérieur du pseudospectre ; pour ce genre de perturbations il n'y aurait donc dans notre cas pas forcément de migration des valeurs propres vers le bord.

De plus, nous étudions dans le théorème 1 l'étendue maximale de la zone sans valeurs propres de l'opérateur perturbé par une perturbation ayant un seul noyau oscillatoire.

Considérons l'opérateur non-formellement-autoadjoint dans $L^2(S^1)$

$$P = hD_x + g(x)\ ,\ \ h \in (0,1]\ , D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}. \tag{0.1}$$

Nous supposons :

Hypothèse 1. — *$g(x)$ est un potentiel analytique (à valeurs dans $\mathbb{C}$) tel que*

$$Im\, g' \neq 0\ , \tag{0.2}$$

sauf en deux points critiques $a, b \in S^1$, avec

$$Im\, g(a) \leq Im\, g(x) \leq Im\, g(b), \forall x \in S^1\ .$$

Nous introduisons le symbole semiclassique

$$p(x,\xi) = \xi + g(x),\ \ (x,\xi) \in T^*(S^1)\ . \tag{0.3}$$

Définition 1. — *Le pseudospectre semiclassique $\Sigma \subset \mathbb{C}$ de P est défini par*

$$\Sigma := \overline{p(T^*(S^1))}. \tag{0.4}$$

Ici ce sera la bande

$$\Sigma = \{\mathrm{Im}\, g(a) \leq \mathrm{Im}\, z \leq \mathrm{Im}\, g(b)\}\ , \tag{0.5}$$

et le spectre se situe à l'intérieur de Σ (ce que nous allons montrer dans le paragraphe suivant).

Nous dénotons par $\sigma(A)$ le spectre de A.

Pour $z \in \overset{\circ}{\Sigma}$, nous introduisons les points $\rho_\pm(z) = (x_\pm, \xi_\pm) \in T^*(S^1)$ donnés par

$$\rho_\pm(z) \in p^{-1}(z);\ \mp\mathrm{Im}\, g'(x_\pm) > 0\ . \tag{0.6}$$

Pour $\Gamma \subset \overset{\circ}{\Sigma}$ un ensemble nous définissons

$$\Gamma_{-+}(\Gamma) := \{(\rho_-(z), \rho_+(z));\ z \in \Gamma\} \tag{0.7}$$

qui est homéomorphe à Γ.

Si Γ est un ouvert, alors $\Gamma_{-+}(\Gamma)$ est une sous-variété symplectique de $T^*(S^1)\times T^*(S^1)$ pour la forme symplectique $d\xi\wedge dx - d\eta\wedge dy$ (voir (4.2)), et nous notons $|\Gamma_{-+}|$ le volume symplectique correspondant.

Nous introduisons la projection

$$\begin{aligned} \Pi_{(x,y)} : T^*(S^1) \times T^*(S^1) &\to S^1 \times S^1 \ , \\ (x, \xi, y, \eta) &\to (x, y) \ . \end{aligned} \tag{0.8}$$

Théorème 1. — *Soit $\gamma \subset \Sigma$ une courbe de la forme*

$$Re\, z = f(Im\, z), Im\, z \in [a', b'],\ \ Im\, g(a) < a' < b' < Im\, g(b) \tag{0.9}$$

où f est analytique.

Alors il existe un voisinage $U \subset S^1\times S^1$ de $\tilde{\gamma} = \Pi_{(x,y)}(\Gamma_{-+}(\gamma))$, $\epsilon_0 > 0$, $C_0 > 0$, une fonction φ analytique dans U (et independante de z) avec $Im\,\varphi \geq 0$, et $\chi \in C_c^\infty(U)$ (indépendant de z), $\chi = 1$ près de $\tilde{\gamma}$ tels que :

Si $Q : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ a le noyau intégral

$$k(x, y) = \chi(x, y)e^{\frac{i}{h}\varphi(x,y)} \ , \tag{0.10}$$

et si $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$, pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$, alors pour h assez petit en fonction de ϵ on a :

$$\sigma(P + \delta Q) \cap V_\epsilon = \emptyset \ , \tag{0.11}$$

où $V_\epsilon = \{z \in \Sigma;\ dist(z, \gamma) \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{C_0}\}$.

Ensuite nous considérons une perturbation δQ, où $Q = Q(\epsilon)$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0 << 1$ est la somme de plusieurs termes oscillants :

Hypothèse 2. — *Soit*

$$Q := \sum_{j=1}^{N} Q_j \ \ : L^2(S^1) \to L^2(S^1) \tag{0.12}$$

avec

$$k_{Q_j}(x, y) = \alpha\chi(x - x_j)\chi(y - y_j)e^{\frac{i}{h}\varphi_j(x,y)}$$

le noyau intégral de Q_j, où $\chi \in C_c^\infty((-\pi, \pi))$, $\chi = 1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, est indépendant de h. La phase est de la forme

$$\varphi_j(x, y) = \xi_j(x - x_j) + \frac{i}{2}(x - x_j)^2 - \eta_j(y - y_j) + \frac{i}{2}(y - y_j)^2 \ ,$$

avec $(x_j, \xi_j) \neq (x_k, \xi_k)$, $(y_j, \eta_j) \neq (y_k, \eta_k)$, $\forall j \neq k$, *et* α *est tel que* $\|Q_j\| = 1$ *(donc* $\alpha \sim (\pi h)^{-\frac{1}{2}}$*). Ici* $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, (x_j, ξ_j), $(y_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2$ *dépendent de* ϵ *mais pas de* h*, alors que* χ, α *ne dépendent pas de* ϵ.

Hypothèse 4. — *Soit* $\Gamma \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}$ *un ouvert simplement connexe de bord* $\gamma = \partial\Gamma \in C^\infty$. *Nous supposons alors que pour* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$,

$$\Gamma_{-+}(\gamma) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N(\epsilon)} B\left(((x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j)), \frac{\sqrt{\epsilon}}{C}\right) ,$$

où C *devra être choisi assez grand. De manière générale* $B(x_0, r)$ *désigne la boule ouverte de centre* x_0 *et de rayon* r.

Finalement nous supposons pour chaque $\epsilon > 0$ une hypothèse 3 (dans la section 7) remplie de manière générique que nous allons énoncer.

Théorème 2. — *Nous supposons que* P *remplit l'hypothèse 1, que la perturbation* Q *remplit les hypothèses 2, 3, 4 et que* $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$ *avec* $\epsilon > 0$ *assez petit indépendant de* h *. Alors le nombre de valeurs propres de* $P + \delta Q$ *dans* Γ *vérifie*

$$\#(\sigma(P + \delta Q) \cap \Gamma) = \frac{1}{2\pi h} |\Gamma_{-+}(\Gamma)| + O(\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}) \tag{0.13}$$

pour h *assez petit en fonction de* ϵ. *Ici* $|\Gamma_{-+}(\Gamma)|$ *désigne l'aire symplectique de* $\Gamma_{-+}(\Gamma)$ *pour la forme* $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$.

Pour prouver ces deux résultats, nous allons procéder de la manière suivante :

Nous commençons par prouver l'existence de solutions locales de $(P - z)u = 0$ près de x_+, et de l'équation adjointe près de x_-. Ceci nous permettra de formuler un problème de Grushin. Nous allons d'abord montrer l'inversibilité pour les problèmes de Grushin locaux près de $x_\pm$. Ensuite nous allons construire un inverse exact global.

Ceci nous permettra alors de relier le spectre de P aux zéros de l'hamiltonien effectif, qui sera ici une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Nous considérons ensuite l'opérateur perturbé par une perturbation δQ, Q étant borné, et montrons que le problème de Grushin reste bien-posé. Nous pourrons faire un développement perturbatif de l'hamiltonien effectif, et nous allons expliciter le terme de premier ordre.

Nous construisons ensuite la perturbation du théorème 1.

Après nous considérons une perturbation remplissant les hypothèses 2, 3, 4 qui nous permettront, à l'aide de la méthode de la phase stationnaire analytique, de prouver la domination du terme de premier ordre perturbatif.

Pour terminer la preuve du théorème 2, nous allons construire des fonctions qui rendront holomorphe l'hamiltonien effectif non-perturbé, respectivement perturbé. Ceci nous permettra, avec les estimations précédentes, de relier ses zéros aux zéros d'une fonction holomorphe bornée par un poids sousharmonique, et l'atteignant prèsque en certains points. Le nombre de zéros pourra alors être exprimé en fonction de l'intégrale du laplacien du poids correspondant.

Nous terminons par la preuve du théorème 1.

Dans un prochain travail nous généralisons le théorème 2 en prenant un opérateur non-perturbé plus général et des perturbations « aléatoires ».

Remerciements : Ce travail fait partie de la thèse de l'auteur préparée sous la direction de J. Sjöstrand.

1. Pseudospectre et solutions BKW

1.1. Définitions et Hypothèses. — Toutes les normes non-indexées seront par défaut des normes $L^2(S^1)$ respectivement $\mathcal{L}(L^2)$. Soit $g : S^1 \to \mathbb{C}$ une fonction analytique, et soit P donné par (0.1).

P admet comme domaine naturel l'espace de Sobolev semiclassique

$$H^1_{sc}(S^1) := \{u \in L^2(S^1); \|u\|_{H^1_{sc}} := \|u\| + \|hD_x u\| < \infty\} . \tag{1.1}$$

Le spectre de P est

$$\sigma = \{z = \langle g\rangle + nh; n \in \mathbb{Z}\},\ \langle g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx . \tag{1.2}$$

Ceci se voit de la manière suivante : soit T la bijection sur H^1_{sc} donnée par

$$Tu(x) := e^{-\frac{i}{h}\int^x (g(y)-\langle g\rangle)dy} u(x) \tag{1.3}$$

(qui est bornée pour $h \in (0,1]$ fixé).

Alors

$$T^{-1}PT = hD_x + \langle g\rangle, \tag{1.4}$$

qui a le spectre ci-dessus.

Nous rappelons :

Hypothèse 1. — *$g(x)$ est un potentiel analytique tel que*

$$Im\, g' \neq 0 \ , \tag{1.5}$$

sauf en deux points critiques $a, b \in S^1$, avec

$$Im\, g(a) \leq Im\, g(x) \leq Im\, g(b), \forall x \in S^1 \ .$$

Dans la suite nous identifierons souvent a et b avec les points dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b < a + 2\pi$ à l'aide de l'application naturelle $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Le crochet de Poisson $\{p, \overline{p}\}$ de $p, \overline{p}$ est donné par

$$\frac{1}{2i}\{p, \overline{p}\} := \frac{1}{2i}(p_\xi \overline{p}_x - p_x \overline{p}_\xi) = \mathrm{Im}\,(p_\xi \overline{p}_x) \ . \tag{1.6}$$

Dans notre cas $\frac{1}{2i}\{p, \overline{p}\} = -\mathrm{Im}\, g'(x)$ et l'hypothèse 1 implique que

$$\forall z \in \overset{\circ}{\Sigma},\ p^{-1}(z) = \{\rho_+(z), \rho_-(z)\},\ \text{avec}\ \pm\frac{1}{i}\{p, \overline{p}\}(\rho_\pm) > 0, \tag{1.7}$$

car $\mathrm{Im}(g(x) - z)$ a, pour chaque valeur de z, exactement deux zéros non dégénérés x_+, x_- avec

$$\mathrm{Im}\,(g(x_\pm) - z) = 0,\ \mp \mathrm{Im}\, g'(x_\pm) > 0, \tag{1.8}$$

et nous pouvons poser

$$\rho_\pm = (x_\pm, \xi_\pm),\ \xi_\pm = \mathrm{Re}\, z - \mathrm{Re}\, g(x_\pm). \tag{1.9}$$

Nous allons restreindre la variable spectrale z à un domaine simplement connexe $\Omega \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}$ (donc avec $\mathrm{dist}\,(\Omega, \partial\Sigma) > 0$ afin de séparer les points $x_\pm$ dans l'espace).

1.2. Solutions locales. — Nous allons montrer que grâce à l'hypothèse 1 il est possible de construire des solutions « BKW » locales des équations $(P - z)u = 0$, $(P^* - \overline{z})v = 0$ dont la norme L^2 est concentrée près de x_+ et près de x_- respectivement.

Nous cherchons une solution locale de la forme

$$u(x, z; h) = c(z; h) e^{\frac{i}{h}\varphi(x,z)},\ c \geq 0 \ . \tag{1.10}$$

Le formalisme BKW n'est pas nécessaire dans notre cas, mais utile pour indiquer une généralisation à des opérateurs plus généraux.

Pour obtenir une solution non-triviale de $(P - z)u = 0$, la phase doit remplir l'*équation eikonale*

$$\varphi'(x) + g(x) = p(x, \varphi'(x)) = z \ . \tag{1.11}$$

En imposant $\varphi(x_+) = 0$, et avec $\varphi'(x_+) = \xi_+ \in \mathbb{R}$, la partie imaginaire de la phase (qui détermine la croissance de u) est fixée par sa deuxième dérivée :

$$\operatorname{Im} \varphi'' = -\operatorname{Im} \left(\frac{p_x}{p_\xi} \right) = -\frac{1}{|p_\xi|^2} \operatorname{Im} (p_x \overline{p}_\xi) = \frac{1}{|p_\xi|^2} \frac{1}{2i} \{p, \overline{p}\}, \tag{1.12}$$

en dérivant l'équation eikonale pour la première égalité.

Soit I_+ un intervalle ouvert indépendant de z avec $x_+(z) \in I_+$, $x_-(z) \notin \overline{I_+}$, $\forall z \in \overline{\Omega}$. Considérons sur I_+

$$e_+(x) := c_+(z; h) e^{-\frac{i}{h} \int_{x_+}^{x} (g(\tilde{x}) - z) d\tilde{x}} = c_+ e^{\frac{i}{h} \varphi_+} \ . \tag{1.13}$$

La partie imaginaire de la phase décroit (localement de manière quadratique) en s'éloignant de x_+ et il est possible de choisir

$$c_+(z; h) \sim h^{-\frac{1}{4}} (c_+^0(z) + h c_+^1(z) + ...) > 0 \tag{1.14}$$

tel que $\|e_+\|_{L^2(I_+)} = 1$.

En effet, la méthode de la phase stationnaire implique que

$$c_+^0 = \left(\frac{\operatorname{Im} \varphi_+''(x_+(z))}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \ . \tag{1.15}$$

Lemme 1.1. — *$e_+ \in H^1_{sc}(I_+)$ est la solution « BKW » normalisée (dans $L^2(I_+)$) à $(P - z)e_+ = 0$ sur I_+ .*

Etant donné que $\frac{1}{i}\{\overline{p}, p\}(\rho_-) = -\frac{1}{i}\{p, \overline{p}\}(\rho_-) > 0$, il est possible de construire une solution BKW normalisée à $(P^* - \overline{z})u = 0$ sur un intervalle ouvert I_- avec $x_-(z) \in I_-$, $x_+(z) \notin \overline{I_-}$, $\forall z \in \overline{\Omega}$, de la forme

$$e_-(x) := c_-(z; h) e^{-\frac{i}{h} \int_{x_-}^{x} \overline{g(\tilde{x}) - z} d\tilde{x}} = c_- e^{\frac{i}{h} \varphi_-}, \ c_- \geq 0 \ . \tag{1.16}$$

La partie imaginaire de la phase est positive sur I_-, et $-\operatorname{Im} \varphi_-''$ est donnée par (1.12). c_-^0 vérifie l'analogue de (1.15).

Lemme 1.2. — *$e_- \in H^1_{sc}(I_-)$ est la solution « BKW » normalisée (dans $L^2(I_-)$) à $(P^* - \overline{z})e_- = 0$ sur I_- .*

Nous avons

$$e_- \in \mathfrak{R}((P - z)|_{C_c^\infty(I_-)})^\perp, \tag{1.17}$$

où $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{N}$ désignent l'image et le noyau d'un opérateur. Nous allons utiliser ces deux solutions dans le paragraphe suivant pour la posée d'un probléme de Grushin.

2. Enoncé et résolution du problème de Grushin

2.1. Problème de Grushin. — La question d'inversibilité de $P-z$ peut être reformulée grâce à un problème de Grushin associé. Soit

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P-z & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : H^1_{sc} \times \mathbb{C} \to L^2 \times \mathbb{C} \tag{2.1}$$

un opérateur borné. Le résultat suivant est bien connu :

Proposition 2.1. — *Supposons que $\mathcal{P}$ admet un inverse borné*

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P}\mathcal{E} = 1_{L^2\times\mathbb{C}} \ \textit{et}\ \mathcal{E}\mathcal{P} = 1_{H^1_{sc}\times\mathbb{C}}.$$

Alors $P-z$ admet un inverse ssi $E_{-+}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ est inversible.

Démonstration. — Nous avons :

$$\begin{aligned}
&R_+E = 0\ ;\ R_+E_+ = 1_{\mathbb{C}},\\
&ER_- = 0\ ;\ E_-R_- = 1_{\mathbb{C}},\\
&(P-z)E_+ = -R_-E_{-+}\ ;\ E_-(P-z) = -E_{-+}R_+,\\
&(P-z)E + R_-E_- = 1_{L^2}\ ;\ E(P-z) + E_+R_+ = 1_{H^1_{sc}}.
\end{aligned}$$

Si E_{-+} est inversible, alors la troisième ligne nous permet d'exprimer $R_\pm$ en fonction de $P-z$. En insérant ceci dans la quatrième ligne nous obtenons

$$\begin{aligned}
&(P-z)(E - E_+E_{-+}^{-1}E_-) = 1_{L^2}\\
&(E - E_+E_{-+}^{-1}E_-)(P-z) = 1_{H^1_{sc}}
\end{aligned}$$

ce qui donne un inverse explicite de $P-z$. Inversement pour $P-z$ inversible la troisième ligne donne $E_\pm$ en fonction de E_{-+}. En utilisant $R_+E_+ = 1$ et $E_-R_- = 1$ nous avons :

$$-(R_+(P-z)^{-1}R_-)E_{-+} = -E_{-+}(R_+(P-z)^{-1}R_-) = 1_{\mathbb{C}}.$$

□

En montrant que $\mathcal{P}$ est inversible nous aurons donc réduit le problème spectral à déterminer le domaine d'inversibilité de E_{-+}.

2.2. Décomposition en problèmes locaux. — Nous allons décomposer le problème de Grushin en deux problèmes locaux pour lesquels un inverse à droite va être construit.

Soient $J_+ \subset (b, a+2\pi)$, $J_- \subset (a,b)$ des intervalles ouverts tels que

$$\overline{\{x_\pm(z); z \in \Omega\}} \subset J_\pm \ . \tag{2.2}$$

Soit $\chi_\pm \in C_c^\infty(I_\pm)$ avec $\chi_\pm = 1$ sur $\overline{J_\pm}$, tels que $\operatorname{supp}(\chi_+) \cap \operatorname{supp}(\chi_-) = \emptyset$.

Nous fixons $I_\pm = S^1 \setminus \overline{J_\mp}$.

2.2.1. Résolution sur I_+. —

Lemme 2.1. — *Pour $v \in L^2(I_+)$, $v_+ \in \mathbb{C}$ le problème*

$$\begin{cases} (P-z)u = v \\ R_+ u = v_+ \end{cases} \tag{2.3}$$

avec

$$R_+ u := \langle u, \chi_+ e_+ \rangle = \int_{I_+} u(x)\chi_+(x)\overline{e_+}(x)dx \tag{2.4}$$

admet la solution unique

$$u = Fv + F_+ v_+ \in H^1_{sc}(I_+) \tag{2.5}$$

et

$$\|F\|_{L_2(I_+)\to H^1_{sc}(I_+)} \le \frac{C}{\sqrt{h}}, \ \|F_+\|_{\mathbb{C}\to H^1_{sc}(I_+)} = O(1) \ . \tag{2.6}$$

Démonstration. — Le problème

$$\begin{cases} (P-z)u = 0 \\ R_+ u = v_+ \end{cases} \tag{2.7}$$

admet la solution unique

$$u = F_+ v_+ := \frac{1}{\langle e_+, \chi_+ e_+ \rangle} v_+ e_+, \tag{2.8}$$

tandis que le problème

$$\begin{cases} (P-z)u = v \\ R_+ u = 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

admet la solution unique

$$u = Fv := (1 - F_+ R_+)\tilde{F} v, \tag{2.10}$$

où $\tilde{F}$ sera defini par la suite.

En supposant $x_+ = 0$ et $z = 0$ pour alléger les notations, la solution générale à $Pu = v$ s'écrit

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{i}{h}\, e^{-\frac{i}{h}\ \int_0^x g(\tilde{x})d\tilde{x}} \left(\int_0^x e^{\frac{i}{h}\int_0^y g(\tilde{x})d\tilde{x}}\ v(y)dy\ +\ \tilde{v}_+ \right) \\
&= \frac{i}{h}\int_0^x e^{-\frac{i}{h}\int_y^x g(\tilde{x})d\tilde{x}}\ v(y)dy\ +\ \hat{v}_+ e_+ \\
&= \tilde{F}v(x) + \hat{v}_+ e_+\ .
\end{aligned}$$

$\tilde{F}$ admet le noyau intégral

$$k(x,y) = \frac{i}{h}\, e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x g(\tilde{x})d\tilde{x}}\ 1_{\{0\le y\le x\}}\ -\frac{i}{h}\, e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x g(\tilde{x})d\tilde{x}}\ 1_{\{x\le y\le 0\}}$$

donc, par le lemme de Schur ([**6**], tome 3, p.74) sa norme L^2 est majorée par

$$\left(\sup_x \int |k(x,y)|dy\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_y \int |k(x,y)|dx\right)^{\frac{1}{2}}\ . \tag{2.11}$$

Grâce au fait que x_+ est supposé être un zéro non-dégénéré de $\operatorname{Im} g$, nous obtenons

$$\frac{1}{C} \le -\frac{\operatorname{Im} g(x)}{x} \le C\ ,$$

ce qui implique (il suffit de considérer $x \ge 0$)

$$\begin{aligned}
|k(x,y)| &= e^{\frac{1}{h}\int_y^x \operatorname{Im} g(\tilde{x})d\tilde{x}} 1_{\{0\le y\le x\}} \\
&\le e^{-\frac{1}{Ch}\ \int_y^x \tilde{x}d\tilde{x}} 1_{\{0\le y\le x\}} \le e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2-y^2)} 1_{\{0\le y\le x\}},
\end{aligned} \tag{2.12}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^x |k(x,y)|dy &\le \frac{1}{h}\int_0^x e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2-y^2)}dy \\
&\le \begin{cases} \frac{1}{h}\int_0^x e^{-\frac{1}{2Ch}x(x-y)}dy \le \frac{C'}{\sqrt{h}} & \text{pour } x \ge \sqrt{h}\ , \\[2ex] \frac{1}{\sqrt{h}} & \text{pour } x \le \sqrt{h}\ . \end{cases}
\end{aligned}$$

De manière analogue pour $x \le 0$:

$$\int_x^0 |k(x,y)|dy \le \frac{1}{h}\int_x^0 e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2-y^2)}dy = \frac{1}{h}\int_0^{|x|} e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2-y^2)}dy\ , \tag{2.13}$$

ce qui donne la même estimation.
Nous avons donc que

$$\sup_{x\in I_+}\int_0^x |k(x,y)|dy \leq \frac{C}{\sqrt{h}}\ . \tag{2.14}$$

De manière analogue (avec la convention que $g-z$ est nul en dehors de I_+) nous avons pour $0\leq y\leq \sqrt{h}$, avec $\partial I_+=\{c,d\}$, $c<d$,

$$\begin{aligned}\sup_{y\leq\sqrt{h}}\int_y^d |k(x,y)|dx &\leq \frac{1}{h}\int_0^d e^{\frac{1}{h}\int_{\sqrt{h}}^x \operatorname{Im} g(\tilde{x})d\tilde{x}}dx\\ &\leq \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2Ch}(x^2-(\sqrt{h})^2)}dx\\ &\leq \frac{e^{\frac{1}{2C}}}{h}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2Ch}x^2}dx\\ &\leq \frac{1}{h}e^{\frac{1}{2C}}\sqrt{\frac{C\pi h}{2}}\leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{h}}\ ,\end{aligned}$$

et pour $y\geq\sqrt{h}$

$$\begin{aligned}\sup_{y\geq\sqrt{h}}\int_y^d |k(x,y)|dx &\leq \sup_{y\geq\sqrt{h}}\frac{1}{h}e^{\frac{1}{2Ch}y^2}\left[-\frac{2Ch}{y}e^{-\frac{1}{2Ch}yx}\right]_{x=y}^{x=\infty}\\ &\leq \sup_{y\geq\sqrt{h}}\frac{2C}{y}\leq\frac{2C}{\sqrt{h}}\ .\end{aligned}$$

Pour $y\leq 0$ on obtient les mêmes estimations.
Donc

$$\|\tilde{F}\|_{L^2(I_+)\to L^2(I_+)}\leq\frac{C}{\sqrt{h}}$$

ce qui implique, en utilisant l'identité $P\tilde{F}v=v$,

$$\begin{aligned}\|\tilde{F}\|_{L^2(I_+)\to H^1_{sc}(I_+)} &= \|\tilde{F}\|+\|hD\tilde{F}\|\\ &\leq \|\tilde{F}\|+\|1-g(x)\tilde{F}\|\\ &\leq (1+\frac{C}{\sqrt{h}})\ \leq\ \frac{\tilde{C}}{\sqrt{h}}\ .\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}\|F\|_{L^2(I_+)\to H^1_{sc}(I_+)} &\leq \big(1+\|F_+R_+\|_{H^1_{sc}(I_+)\to H^1_{sc}(I_+)}\big)\,\|\tilde F\|_{L^2(I_+)\to H^1_{sc}(I_+)}\\ &\leq \frac{\tilde C}{\sqrt{h}}\ ,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que

$$\|F_+R_+\|_{H^1_{sc}(I_+)\to H^1_{sc}(I_+)} \leq \frac{1}{\langle e_+,\chi_+e_+\rangle}\|\chi_+e_+\|_{L^2(I_+)}\|e_+\|_{H^1_{sc}(I_+)}$$

et

$$D_+ := \langle e_+,\chi_+e_+\rangle = 1-|c_+|^2\int_{I_+}(1-\chi_+)e^{-\frac{2}{h}\operatorname{Im}\varphi_+(x)}dx = 1+O(e^{-\frac{1}{Ch}}), \tag{2.15}$$

car sur $\operatorname{supp}(1-\chi_+)$ l'exposant est strictement négatif, et $\frac{1}{D_+}=1+O(e^{-\frac{C}{h}})$. □

2.2.2. Résolution sur I_-. — Près de x_- la situation est analogue pour $(P^*-\overline{z})$ que près de x_+ pour $(P-z)$.

Lemme 2.2. — *Pour $v\in L^2_{comp}(I_-)$, le problème*

$$(P-z)u+R_-u_-=v \tag{2.16}$$

où

$$R_-u_- := u_-\chi_-e_-\ ,\ u_-\in\mathbb{C}\ ,$$

admet une solution unique $(u,u_-)\in H^1_{sc,comp}(I_-)\times\mathbb{C}$:

$$u=Gv, \tag{2.17}$$

$$u_-=G_-v, \tag{2.18}$$

et, en tant qu'opérateur $L^2_{comp}(I_-)\to H^1_{sc,comp}(I_-)$:

$$\|G\|_{L^2\to H^1_{sc}} \leq \frac{C}{\sqrt{h}}\ , \tag{2.19}$$

ainsi que, en tant qu'opérateur $L^2_{comp}(I_-)\to\mathbb{C}$:

$$\|G_-\|_{L^2\to\mathbb{C}} = O(1)\ . \tag{2.20}$$

Démonstration. — Pour $x\leq x_-$ nous avons l'unique solution à $(P-z)u=\tilde v$, $\tilde v\in L^2_{comp}(I_-)$ qui s'annule près de $\inf(I_-)$:

$$u_1(x)=\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{i}{h}\int_y^x(g(\tilde x)-z)d\tilde x}\tilde v(y)dy =: \tilde G_1\tilde v(x)\ , \tag{2.21}$$

alors que pour $x \geq x_-$ nous avons l'unique solution qui s'annule près de $\sup(I_-)$:

$$u_2(x) = \frac{i}{h}\int_{\infty}^{x} e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x (g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}\tilde{v}(y)dy =: \tilde{G}_2\tilde{v}(x)\ , \tag{2.22}$$

les parties réelles des deux exposants étant négatives dans le support de $\tilde{v}$.

Afin d'obtenir une solution continue à support compact dans I_-, il faut imposer que

$$0 = u_1(x_-) - u_2(x_-) = \frac{i}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^{x_-}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}\tilde{v}(y)dy = \frac{i}{h\overline{c}_-(h)}\langle \tilde{v}, e_-\rangle$$

(bien défini car $v \in L^2_{\mathrm{comp}}(I_-)$), ce qui donne, en introduisant

$$u_- = G_-v := \frac{1}{\langle \chi_-e_-, e_-\rangle}\langle v, e_-\rangle = \frac{1}{D_-}\langle v, e_-\rangle\ , \tag{2.23}$$

une solution continue

$$\begin{aligned} u &= Gv = \tilde{G}(I - R_-G_-)v\ ,\\ u_- &= G_-v\ , \end{aligned}$$

où $\tilde{G}$ est donné par les expressions (2.21), (2.22). En observant que $\tilde{G}$ a le noyau intégral

$$k(x,y) = \frac{i}{h}\ e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x g(\tilde{x})d\tilde{x}}\ 1_{\{y\leq x\leq x_-\}}\ - \frac{i}{h}\ e^{-\frac{i}{h}\ \int_y^x g(\tilde{x})d\tilde{x}}\ 1_{\{x_-\leq x\leq y\}}$$

qui est semblable au noyau intégral de l'adjoint de F (en remarquant que $\operatorname{Im} g'(x_+) \sim -\operatorname{Im} g'(x_-)$), nous pouvons utiliser les estimations du paragraphe précédent pour trouver que la norme L^2 de $\tilde{G}$ en tant qu'opérateur agissant sur $C_c^\infty(I_-)$ vérifie

$$\|\tilde{G}\| \leq \frac{C}{\sqrt{h}}\ , \tag{2.24}$$

ainsi que

$$\|G\| \leq \frac{C}{\sqrt{h}}\ ,\ \|G\|_{L^2\to H^1_{sc}} \leq \frac{C'}{\sqrt{h}}\ , \tag{2.25}$$

ce qui reste valable pour son extension a L^2_{comp}. En remarquant que

$$\text{supp }(\tilde{G}v) \subset \text{ ch }(\{x_-\} \cup \text{ supp }(v)) \tag{2.26}$$

où ch désigne l'enveloppe convexe, nous avons

$$G : L^2_{comp}(I_-) \to H^1_{sc,comp}(I_-)\ . \tag{2.27}$$

□

2.3. Inverse global. — Nous allons construire un inverse à droite à l'aide des inverses locaux sur $I_\pm$.

Nous paramétrisons S^1 en identifiant a à l'origine de l'axe réel et en choisissant le sens positif de parcours. Nous choisissons une partition de l'unité $\psi_\pm \in C_c^\infty(I_\pm)$, $\psi_+ + \psi_- = 1$, telle que $\chi_\pm \prec \psi_\pm$, où $\psi \prec \phi$ signifie

$$\operatorname{supp}(\psi) \cap \operatorname{supp}(1-\phi) = \emptyset \ . \tag{2.28}$$

Nous commençons par résoudre le problème

$$\begin{cases} (P-z)u = \psi_+ v \\ R_+ u = v_+ \end{cases}$$

sur I_+ :

$$\begin{aligned} &u_1 := (1-\chi_-)F\psi_+ v + (1-\chi_-)F_+ v_+ \ , \\ &R_+ u_1 = \langle u_1, \chi_+ e_+\rangle = v_+ \ , \\ &(P-z)u_1 = \psi_+ v - [P,\chi_-]F\psi_+ v - [P,\chi_-]F_+ v_+ \ , \end{aligned}$$

(en utilisant $\chi_+ \prec (1-\chi_-)$ et $\psi_+ \prec (1-\chi_-)$ car $\chi_- \prec \psi_-$).

Avec (2.26), nous pouvons « corriger l'erreur » sur I_- en y résolvant le problème

$$(P-z)u_2 + R_- u_- = \psi_- v + [P,\chi_-]F\psi_+ v + [P,\chi_-]F_+ v_+ \ .$$

Nous avons la solution

$$\begin{aligned} &u_2 = G(\psi_- v + [P,\chi_-]F\psi_+ v + [P,\chi_-]F_+ v_+) \ , \\ &u_- = G_-(\psi_- v + [P,\chi_-]F\psi_+ v + [P,\chi_-]F_+ v_+) \ , \end{aligned}$$

et $R_+ u_2 = 0$ car $\operatorname{supp}(u_2) \cap \operatorname{supp}(\chi_+) = \emptyset$.

Proposition 2.2. — *$\mathcal{P}$ est inversible d'inverse*

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E & E_+ \\ E_- & E_{-+} \end{pmatrix},$$

donné par :

$$
\begin{aligned}
&E = G\left(\psi_- + \frac{h}{i}\chi'_- F\psi_+\right) + (1-\chi_-)F\psi_+,\ \|E\|_{L^2\to H^1_{sc}} = O(\frac{1}{\sqrt{h}}),\\
&E_+ = (1-\chi_-)F_+ + G\frac{h}{i}\chi'_- F_+,\ \|E_+\| = O(1),\\
&E_- = G_-(\psi_- + \frac{h}{i}\chi'_- F\psi_+),\ \|E_-\| = O(1),\\
&E_{-+} = G_-\frac{h}{i}\chi'_- F_+ = -\frac{h}{iD_-D_+}\langle\chi'_- e_+, e_-\rangle,\ \|E_{-+}\| = O(e^{-\frac{1}{Ch}}).
\end{aligned}
$$

Démonstration. — Avec $\chi'_- \prec \psi_-$ il est clair que $\mathcal{E}$ est un inverse à droite.

On montre facilement que $\mathcal{P}$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 et donc $\mathcal{E}$ est aussi un inverse à gauche. □

E_{-+} sera composé de deux intégrales dans lesquelles χ'_- est non-nulle, et en étant attentifs lors de l'identification des intervalles sur l'axe réel et sur S^1 nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
E_{-+} &= -\frac{hc_+\overline{c}_-}{iD_+D_-}\Bigg(\int_{I_+\cap I_-}\chi'_- e^{\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}} e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}dx\\
&\quad + \int_{I_+\cap(I_-+2\pi)}\chi'_- e^{\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x-2\pi}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}} e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}dx\Bigg)\\
&= \frac{hc_+\overline{c}_-}{iD_+D_-}\left(e^{\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x_+}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}} - e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x_-+2\pi}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}\right),
\end{aligned}
$$

étant donné que l'intégrale sur χ'_- donne -1 sur $I_+\cap I_-$ et 1 sur $I_+\cap(I_-+2\pi)$. Le préfacteur est $O(\sqrt{h})$ car $c_\pm = O(h^{-\frac{1}{4}})$.

Notons que E_{-+} est exponentiellement petit dans Σ, mais les zéros de E_{-+} se situent exactement en $z\in\sigma(P)$ et sont donnés par une condition de quantification de type Bohr-Sommerfeld :

$$
\oint_{x_-}^{x_-+2\pi}(g(x)-z)dx = 2\pi h\ n\ ,\ n\in\mathbb{Z}\ , \tag{2.29}
$$

équivalente à (1.2).

3. Perturbation

Considérons une perturbation δQ, où Q est borné dans $\mathcal{L}(L^2)$, $\|Q\| \leq C$ indépendant de h, et $\delta \geq 0$ est un paramètre de perturbation assez petit. Nous commençons par montrer que le problème de Grushin reste bien posé.

Soit

$$\mathcal{P}^\delta = \begin{pmatrix} P + \delta Q & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous écrivons $\mathcal{P}^\delta \mathcal{E} = 1 + K$,

$$K = \begin{pmatrix} \delta QE & \delta QE_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Pour

$$\delta \leq \frac{\sqrt{h}}{C} \quad \text{avec } C \text{ assez grand,} \tag{a}$$

nous avons $\|K\| \leq \frac{C'\delta\|Q\|}{\sqrt{h}} < \frac{1}{2}$. Nous obtenons la série de Neumann

$$\mathcal{E}^\delta = \mathcal{E}(1+K)^{-1} = \mathcal{E}\sum_{j=0}^{\infty}(-K)^j \tag{3.2}$$

avec

$$K^j = \begin{pmatrix} (\delta QE)^j & (\delta QE)^{j-1}(\delta QE_+) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; j \geq 1. \tag{3.3}$$

Nous avons alors la

Proposition 3.1. — *Soit Q uniformément borné en h, et δ vérifiant (a), alors $\mathcal{P}^\delta$ admet un inverse*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^\delta &= \begin{pmatrix} E^\delta & E_+^\delta \\ E_-^\delta & E_{-+}^\delta \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{E}^0 + \sum_{j\geq 1}(-1)^j \begin{pmatrix} E(\delta QE)^j & (E\delta Q)^j E_+ \\ E_-(\delta QE)^j & E_-(\delta QE)^{j-1}(\delta QE_+) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de norme $O(\frac{1}{\sqrt{h}})$.

Nous avons immédiatement le

Corollaire 3.1. —

$$\mathcal{E}^\delta - \mathcal{E}^0 = \begin{pmatrix} O(\frac{\delta}{h}) & O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \\ O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) & O(\delta) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Nous écrivons

$$E_{-+}^{\delta} := \sum_{j\geq 0} \delta^j E_{-+}^{(j)}, \tag{3.5}$$

$$E_{-+}^{(0)} := G_- \frac{h}{i}\chi'_- F_+,\ E_{-+}^{(j)} := (-1)^j E_-(QE)^{j-1} Q E_+,\ j \geq 1\ .$$

Alternativement nous pouvons partir de l'estimation "a priori" pour la solution du problème de Grushin non-perturbé

$$\sqrt{h}\|u\|_{H^1_{sc}} + |u_-| \leq C(\|v\| + \sqrt{h}|v_+|)$$

pour obtenir pour la solution du probléme perturbé $Pu = v + (P^\delta - P)u$ que

$$\sqrt{h}\|u\|_{H^1_{sc}} + |u_-| \leq C(\|v\| + \sqrt{h}|v_+| + \delta\|Q\|_{H^1\to L^2}\|u\|_{H^1_{sc}}).$$

4. Propriétés analytiques de E_{-+}

Nous allons d'abord trouver une fonction poids l qui nous permettra de construire une fonction holomorphe ayant les mêmes zéros que E_{-+}^{δ}.

Nous partons de l'identité

$$\partial_{\overline{z}}(\mathcal{P}^\delta \mathcal{E}^\delta) = 0$$

(étant donné que $\mathcal{P}^\delta\mathcal{E}^\delta = 1_{H^1_{sc}\times\mathbb{C}}$) et avons

$$\begin{aligned}
\partial_{\overline{z}} E_{-+}^{\delta} &= -\left(\mathcal{E}^\delta(\partial_{\overline{z}}\mathcal{P}^\delta)\mathcal{E}^\delta\right)_{22} \\
&= -\left(E_-^\delta(\partial_{\overline{z}}R_-) + (\partial_{\overline{z}}R_+)E_+^\delta\right) E_{-+}^\delta \\
&= -k^\delta(z)E_{-+}^\delta\ ,
\end{aligned}$$

car $\mathcal{P}_{11}^\delta = P - z + \delta Q$ est holomorphe et $\mathcal{P}_{22} = 0$.

E_{-+}^δ n'est donc pas analytique mais en cherchant une solution dans Ω à

$$\frac{1}{h}\partial_{\overline{z}} l^\delta(z) = k^\delta(z)$$

nous obtenons une fonction holomorphe $e^{\frac{l^\delta(z)}{h}} E_{-+}^\delta$ qui aura les mêmes zéros que E_{-+}^δ.

4.1. Propriétés analytiques de $E_{-+}^{(0)}$. — Rappelons que

$$E_{-+}^{(0)} = \frac{hc_+\overline{c}_-}{iD_-D_+}\left(e^{\frac{i}{h}\int_{x_-}^{x_+}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}} - e^{-\frac{i}{h}\int_{x_+}^{x_-+2\pi}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x}}\right).$$

En choisissant

$$l_0(z) = -i\int_{x_-}^{x_+}(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x} \tag{4.1}$$

nous avons

$$e^{\frac{l_0(z)}{h}}E_{-+}^{(0)} = \frac{hc_+\overline{c}_-}{iD_-D_+}(1-e^{-\frac{2\pi i}{h}(<g>-z)}) \ ,$$

où le dernier facteur est holomorphe en z.

Soit

$$l^0(z) := l_0(z) - h\ln\frac{\sqrt{h}c_+\overline{c}_-}{D_-D_+} = l_0 + O(h)$$

qui est bien défini car $D_\pm = 1 + O(e^{-\frac{1}{Ch}})$ et $c_\pm > 0$.

Nous obtenons une fonction holomorphe

$$e^{\frac{l^0(z)}{h}}E_{-+}^{(0)} = \frac{\sqrt{h}}{i}(1-e^{-\frac{2\pi i}{h}(<g>-z)})$$

ayant les mêmes zéros que $E_{-+}^{(0)}$.

Lemme 4.1. — *$Re\, l_0(z)$ est strictement sous-harmonique et nous avons*

$$\Delta Re\, l_0(z) dRe\, z \wedge dIm\, z = d\xi_- \wedge dx_- - d\xi_+ \wedge dx_+ \ , \tag{4.2}$$

où $d\xi_- \wedge dx_- - d\xi_+ \wedge dx_+$ est la forme symplectique $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$ restreinte à Γ_{-+}.

Démonstration. —

$$\mathrm{Re}\, l_0(z) = \int_{x_-}^{x_+}\mathrm{Im}\,(g(\tilde{x})-z)d\tilde{x} \ ,$$

donc (avec $\mathrm{Im}\,(g(x_\pm)-z) = 0$)

$$\partial_{\overline{z}}\mathrm{Re}\, l_0(z) = \frac{1}{2i}(x_+ - x_-)$$

et

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{Re}\, l_0(z) &= 4\partial_z \partial_{\overline{z}} \mathrm{Re}\, l_0(z) = \frac{2}{i}(\partial_z x_+ - \partial_z x_-) \\ &= -(\partial_{\mathrm{Im}\, z} x_+ - \partial_{\mathrm{Im}\, z} x_-) \\ &= (\frac{1}{\mathrm{Im}\, g'(x_-)} - \frac{1}{\mathrm{Im}\, g'(x_+)}) \\ &> 0.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Ici on utilise (1.8) qui entraine $dx_\pm = \frac{1}{\mathrm{Im}\, g'(x_\pm)} d\mathrm{Im}\, z$.

En utilisant $\xi_\pm = \mathrm{Re}\,(z - g(x_\pm))$ nous obtenons

$$d\xi_\pm \wedge dx_\pm = \frac{1}{\mathrm{Im}\, g'(x_\pm)}(d\mathrm{Re}\, z \wedge d\mathrm{Im}\, z) \tag{4.4}$$

ce qui implique (4.2). □

Nous avons aussi prouvé que Γ_{-+} est symplectique pour la forme symplectique $d\xi \wedge dx - d\eta \wedge dy$.

4.2. Propriétés analytiques de E^δ_{-+}. — Nous imposons

$$\delta << h^{\frac{3}{2}} \ , \tag{b}$$

ce qui implique (a) pour h assez petit.

L'équation $\partial_{\overline{z}}$ pour E^δ_{-+} donne, en insérant la série de Neumann

$$\begin{aligned}k^\delta(z) &= E^\delta_-(\partial_{\overline{z}} R_-) + (\partial_{\overline{z}} R_+) E^\delta_+ \\ &= k^0(z) + \sum_{j\geq 1} (-1)^j (E^0_-((\delta Q E^0)^j \partial_{\overline{z}} \chi_- e_-) + \langle (E^0 \delta Q)^j E^0_+, \partial_z \chi_+ e_+ \rangle) \ ,\end{aligned} \tag{4.5}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}|k^\delta(z) - k^0(z)| &\leq \sum_{j\geq 1} (\frac{C\delta}{\sqrt{h}})^j (\|\partial_{\overline{z}} e_-\| + \|\partial_z e_+\|) \\ &\leq \frac{C\delta}{\sqrt{h}} O(\frac{1}{h}) = O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}) \ .\end{aligned}$$

Une solution de

$$\frac{1}{h}\partial_{\overline{z}} l^\delta(z) = k^\delta(z) \tag{4.6}$$

dans un voisinage $\tilde{\Omega} \subset\subset \Sigma$ de Ω est donné par $l^\delta = l^0 + (l^\delta - l^0)$ avec

$$(l^\delta - l^0)(z) = \frac{h}{\pi} \int_{\tilde{\Omega}} \frac{(k^\delta - k^0)(z')}{z - z'} \mathcal{L}(dz') \ , \tag{4.7}$$

où $\mathcal{L}(dz)$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. Nous obtenons une fonction holomorphe

$$e^{\frac{l^\delta}{h}} E^\delta_{-+} \tag{4.8}$$

avec

$$|l^\delta - l^0| \leq h \|k^\delta - k^0\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \|\frac{1}{z}\chi(\frac{z}{R})\|_{L^1} = O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \ , \tag{4.9}$$

si $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, $\chi(z) = 1$ près de $z = 0$ et $R >> 1$.

5. Analyse de E^δ_{-+}

Nous allons reprendre le développpement perturbatif (3.5) de la fonction holomorphe (en δ) $e^{\frac{l^\delta}{h}} E^\delta_{-+}$, et montrer que le terme de premier ordre est rendu holomorphe par la fonction poids du problème non-perturbé.

Lemme 5.1. — *Sous les hypothèses (c) et (d), nous avons*

$$e^{\frac{l^\delta}{h}} E^\delta_{-+} = h^{-\frac{1}{2}}(-\delta e^{\frac{l_0}{h}} u(z) + O(e^{\frac{l_0}{h}} \frac{\delta^2}{h^{\frac{3}{2}}})) \ , \tag{5.1}$$

où

$$e^{\frac{l_0}{h}} u(z) = e^{\frac{l_0}{h}} \langle Q(1-\chi_-) e^{\frac{i}{h}\varphi_+}, \psi_- e^{\frac{i}{h}\varphi_-} \rangle \tag{5.2}$$

est holomorphe en z.

Démonstration. — Avec les inégalités de Cauchy pour une fonction holomorphe en δ dans un disque de rayon $O(\frac{\sqrt{h}}{C})$ centré en 0, nous avons

$$E^\delta_{-+} = E^{(0)}_{-+} + \delta E^{(1)}_{-+} + O(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}) \ . \tag{5.3}$$

Puisque $E^{(0)}_{-+} = O(e^{-\frac{1}{C^* h}})$, ce terme s'absorbe dans le terme de reste si on suppose que

$$e^{-\frac{1}{C^* h}} = O(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}) \ . \tag{c}$$

De plus, il existe $D > 0$ indépendant de h tel que

$$\begin{aligned} -e^{\frac{l^0}{h}} E_{-+}^{(1)} &= e^{\frac{l^0}{h}} E_- Q E_+ \qquad (5.4)\\ &= e^{\frac{l^0}{h}} \frac{1}{D_+ D_-} \langle (\psi_- + \frac{h}{i}\chi_-' F \psi_+) Q((1-\chi_-) + G\frac{h}{i}\chi_-')e_+, e_- \rangle \\ &= e^{\frac{l^0}{h}} \frac{c_+ \overline{c_-}}{D_+ D_-} \langle Q(1-\chi_-) e^{\frac{i}{h}\varphi_+}, \psi_- e^{\frac{i}{h}\varphi_-} \rangle + e^{\frac{l^0}{h}} O(e^{-\frac{1}{Dh}}) \\ &= h^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{l_0}{h}} u(z) + e^{\frac{l_0}{h}} O(e^{-\frac{1}{Dh}}) \ . \end{aligned}$$

Le premier terme est holomorphe, car Q est indépendant de z.

Nous supposons

$$e^{-\frac{1}{Dh}} = O(\frac{\delta}{\sqrt{h}}) \ . \qquad \text{(d)}$$

En développant finalement

$$e^{\frac{l^\delta - l^0}{h}} = 1 + O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}}) \qquad (5.5)$$

nous avons

$$\begin{aligned} e^{\frac{l^\delta}{h}} E_{-+}^\delta &= e^{\frac{l^0}{h}} E_{-+}^\delta (1 + O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}})) \qquad (5.6)\\ &= e^{\frac{l^0}{h}} (\delta E_{-+}^{(1)} + O(\frac{\delta^2}{\sqrt{h}}))(1 + O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}})) \\ &= h^{-\frac{1}{2}} (-\delta u(z) e^{\frac{l_0}{h}} + O(e^{\frac{l_0}{h}} \frac{\delta^2}{h^{\frac{3}{2}}})), \end{aligned}$$

car $e^{\frac{l^0 - l_0}{h}} = O(1)$, ce qui termine la preuve. □

6. Construction de la perturbation du théorème 1

Soit $U \subset S^1 \times S^1$ un ouvert. Considérons un opérateur $Q : L^2(S^1) \to L^2(S^1)$ ayant un noyau intégral de la forme

$$k(x, y) = \chi(x, y) e^{\frac{i}{h}\varphi(x,y)} \qquad (6.1)$$

où $\chi \in C_c^\infty(U)$ est indépendant de z, φ est analytique dans U et indépendant de z avec $\operatorname{Im} \varphi \geq 0$; alors, d'après le lemme de Schur, Q est borné uniformément en h et nous avons

$$u(z; h) = \iint a(x, y) e^{\frac{i}{h}(\varphi(x,y) - \overline{\varphi_-}(x,z) + \varphi_+(y,z))} dx dy \ , \qquad (6.2)$$

où $a(x,y) = \chi(x,y)\psi_-(x)(1-\chi_-)(y)$.

Proposition 6.1. — *Soit $\gamma \subset \Sigma$ une courbe de la forme*

$$Re\, z = f(Im\, z), Im\, z \in [a', b'],\ \ Im\, g(a) < a' < b' < Im\, g(b) \qquad (6.3)$$

où f est analytique. Alors il existe une phase φ définie dans un voisinage de $\Pi_{(x,y)}(\Gamma_{-+}(\gamma)) = \tilde{\gamma}$, analytique, telle que la phase totale $\varphi(x,y) - \overline{\varphi_-}(x,z) + \varphi_+(y,z)$ ait un point critique non-dégénéré dans $\tilde{\gamma}$, pour $z \in \gamma$.

Démonstration. — Soit

$$[a', b'] \ni t = \mathrm{Im}\, z \mapsto \tilde{\gamma}(t) = (x_-(t), x_+(t)) \ . \qquad (6.4)$$

C'est une courbe injective à différentielle non-nulle. De plus, la forme de γ nous permet de paramétriser

$$[a', b'] \ni t \mapsto (\xi_-(t), -\xi_+(t)) = (\xi_-(f(t)+it), -\xi_+(f(t)+it)) \ . \qquad (6.5)$$

Il s'agit alors de construire une phase φ analytique telle que

$$\nabla\varphi(\tilde{\gamma}(t)) = \begin{pmatrix} \xi_-(t) \\ -\xi_+(t) \end{pmatrix} \ . \qquad (6.6)$$

Soit

$$\psi(\tilde{\gamma}(t)) = \psi(\tilde{\gamma}(0)) + \int_0^t \begin{pmatrix} \xi_-(t) \\ -\xi_+(t) \end{pmatrix} \cdot \tilde{\gamma}'(t) dt \ . \qquad (6.7)$$

Soit ψ une extension analytique (à partie imaginaire ≥ 0). Soit

$$\varphi = \psi + g \ . \qquad (6.8)$$

Nous voulons construire une fonction analytique g telle que $g_{|\tilde{\gamma}} = 0$ et que

$$\nabla g(\tilde{\gamma}(t)) = ((\begin{pmatrix} \xi_-(t) \\ -\xi_+(t) \end{pmatrix} - \nabla\psi(\tilde{\gamma}(t))) \cdot n)n \qquad (6.9)$$

où n désigne un choix de vecteur unitaire normal à $\tilde{\gamma}$.

Pour ceci, nous nous plaçons dans des coordonnées géodésiques (analytiques)

$$vois(\tilde{\gamma}) \ni (x,y) \to (x_1, x_2) \ . \qquad (6.10)$$

Pour s une paramétrisation par longueur d'arc de $\tilde{\gamma}$ et $\Pi_{\tilde{\gamma}}$ la projection orthogonale sur $\tilde{\gamma}$, les coordonnées géodésiques sont données par :

$$x_1 = s(\Pi_{\tilde{\gamma}}(x,y)),\ |x_2| = \mathrm{dist}\,((x,y), \tilde{\gamma}) \qquad (6.11)$$

et le signe de x_2 est déterminé par la condition $\frac{\partial x_2}{\partial n} = 1$.

Dans ces coordonnées, nous cherchons alors g réel (ou à partie imaginaire positive), analytique avec $g(x_1, 0) = 0$ et

$$\nabla g(x_1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu(x_1) \end{pmatrix}, \tag{6.12}$$

où $\nu(x_1)$ est déterminé en exprimant (6.9) en coordonnées géodésiques. Par exemple

$$g(x_1, x_2) = \nu(x_1)x_2 \tag{6.13}$$

et on peut rajouter des termes d'ordre supérieur quelconque en x_2, notamment $i(x_2)^2$. En revenant dans les coordonnés standard nous obtenons alors une phase analytique avec les propriétés voulues. $\square$

De manière générale, pour que la phase totale ait un point critique la variété *lagrangienne* associée à φ

$$C_\varphi := \{(x, \varphi'_x; y, -\varphi'_y)\} \tag{6.14}$$

doit intersecter Γ_{-+}. Or, d'après (4.2), celle-ci est symplectique, donc si leur intersection est une variété, elle sera au maximum unidimensionelle, ce qui est le cas du lemme précédant.

7. Perturbation par une somme de noyaux oscillants

Dans cette section on se place dans le cadre du théorème 2. L'idée est de considérer une somme de noyaux oscillants dont les lagrangiennes se rapprochent « suffisamment souvent » de Γ_{-+} :

Hypothèse 2. — *Soit*

$$Q := \sum_{j=1}^{N} Q_j \ : L^2(S^1) \to L^2(S^1) \tag{7.1}$$

avec

$$k_{Q_j}(x, y) = \alpha\chi(x - x_j)\chi(y - y_j)e^{\frac{i}{h}\varphi_j(x,y)}$$

le noyau intégral de Q_j, où $\chi \in C_c^\infty((-\pi, \pi))$, $\chi = 1$ sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, est indépendant de h. La phase est de la forme

$$\varphi_j(x, y) = \xi_j(x - x_j) + \frac{i}{2}(x - x_j)^2 - \eta_j(y - y_j) + \frac{i}{2}(y - y_j)^2 \ ,$$

avec $(x_j, \xi_j) \neq (x_k, \xi_k)$, $(y_j, \eta_j) \neq (y_k, \eta_k)$, $\forall j \neq k$, et α est tel que $\|Q_j\| = 1$ (donc $\alpha \sim (\pi h)^{-\frac{1}{2}}$). Ici $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$,

(x_j, ξ_j), $(y_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^2$ dépendent de ϵ mais pas de h, alors que χ, α ne dépendent pas de ϵ.

Lemme 7.1. — *Il existe q indépendant de ϵ tel que $\|Q\| \leq q$ pour h assez petit.*

Preuve :
Nous omettons les troncatures en sous-entendant que nous intégrons uniquement sur leur support.

Considérons le noyau intégral de $Q_j^* Q_k$ sans les troncatures sur $\mathbb{R}$ (l'erreur commise est $O(e^{-\frac{1}{Ch}})$) :

$$\int \overline{k}_{Q_j}(x', x) k_{Q_k}(x', y) dx'$$
$$= |\alpha| e^{\frac{i}{h}(\eta_j(x-y_j)+\frac{i}{2}(x-y_j)^2)} e^{\frac{i}{h}(-\eta_k(y-y_k)+\frac{i}{2}(y-y_k)^2)} e^{\frac{i}{h}(\xi_k+\xi_j)\frac{x_j-x_k}{2}} e^{-\frac{1}{4h}|\rho_j-\rho_k|^2} \ .$$

Le lemme de Schur implique donc avec la normalisation que (toujours avec des erreurs $O(e^{-\frac{1}{Ch}})$)

$$\|Q_j^* Q_k\|^{\frac{1}{2}} \leq C_0 e^{-\frac{1}{4h}|\rho_j-\rho_k|^2} \tag{7.2}$$

et de manière analogue

$$\|Q_j Q_k^*\|^{\frac{1}{2}} \leq C_0 e^{-\frac{1}{4h}|\nu_j-\nu_k|^2} \ . \tag{7.3}$$

Avec

$$\sum_k \|Q_j Q_k^*\|^{\frac{1}{2}}, \sum_k \|Q_j^* Q_k\|^{\frac{1}{2}} \leq 1 + N(\epsilon) e^{-\frac{c_j(\epsilon)}{h}}, \ c_j(\epsilon) > 0 \tag{7.4}$$

et

$$q_{h,\epsilon} := \sup_j (1 + N(\epsilon) e^{-\frac{c_j(\epsilon)}{h}}) < q \ , \tag{7.5}$$

h assez petit en fonction de ϵ, le lemme de Cotlar-Stein ([**9**]) implique

$$\|Q\| \leq q \ . \tag{7.6}$$

□

Afin de trouver les estimations sur $e^{\frac{l^\delta}{h}}E^\delta_{-+}$ qui nous permettront de terminer la preuve du théorème 2, il s'agit d'évaluer

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_j u_j(z) \qquad (7.7) \\ &= \sum_j \iint \alpha\chi(x-x_j)\chi(y-y_j)(1-\chi_-)(y)\psi_-(x)e^{\frac{i}{h}\psi_j(x,y,z)}dxdy \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \psi_j(x,y,z) &:= -\overline{\varphi}_-(x,z)+\varphi_j(x,y)+\varphi_+(y,z) \qquad (7.8) \\ &=: F((x,y),(\rho_-(z),\rho_+(z)),(\rho_j,\nu_j)), \end{aligned}$$

avec $\rho_j := (x_j,\xi_j)$, $\nu_j := (y_j,\eta_j) \in T^*(S^1)$; F est analytique en toutes les variables avec $\operatorname{Im} F \sim d((x,y),(x_-,x_+))^2 + d((x,y),(x_j,y_j))^2$, et si $\operatorname{dist}(\Gamma_{-+}(z),(\rho,\nu)) \geq \omega > 0$, alors

$$\operatorname{Im} F + |F'_{(x,y)}| \geq c(\omega) > 0 \ , \qquad (7.9)$$

donc par déformation de contour $|u_j(z)| = O(e^{-\frac{1}{Ch}})$.

Il suffit donc de considérer les u_j avec $\operatorname{dist}(\Gamma_{-+}(z),(\rho_j,\nu_j))$ assez petit.

Lemme 7.2. — *(Phase stationnaire)*
Si $dist(\Gamma_{-+}(z),(\rho_j,\nu_j))$ est assez petit, alors $\psi_j(x,y,z)$ a un point critique $X_c = (x_c,y_c)$ dans un voisinage complexe de $X_j = (x_j,y_j)$. Nous avons alors

$$u_j(z) = h\alpha e^{\frac{i}{h}\Phi_j(z)}(a_j(z)+O(h)) \ , \qquad (7.10)$$

où $\Phi_j(z) = \psi_j(z,x_c,y_c)$, et $e^{\frac{l_0}{h}}u_j$, $\Phi_j(z) - il_0(z)$ et $a_j(z)$ sont holomorphes en z.

Soit

$$f(\rho_-(z),\rho_+(z),\rho,\nu) := Im\, F(X_c,\rho_-(z),\rho_+(z),\rho,\nu) \ , \qquad (7.11)$$

ce qui est analytique en (ρ,ν) et $(\rho_-(z),\rho_+(z))$.

Alors

$$f(\rho_-(z),\rho_+(z),\rho,\nu) \sim (dist(\Gamma_{-+}(z),(\rho,\nu)))^2 \ , \qquad (7.12)$$

donc $z \mapsto f(\rho_-(z),\rho_+(z),\rho,\nu)$ admet un minimum non-dégénéré en un point $Z(\rho,\nu)$, et $(\rho,\nu) \mapsto Z(\rho,\nu)$ est une submersion. Ceci implique pour $Im\,\Phi_j(z) = f(\rho_-(z),\rho_+(z),\rho_j,\nu_j)$ que

$$Im\,\Phi_j(z) \sim (dist(\Gamma_{-+}(z),(\rho_j,\nu_j)))^2 \ , \qquad (7.13)$$

et cette fonction admet un minimum non-dégénéré en $z_j = Z(\rho_j, \nu_j)$*, et l'amplitude* a_j *y est elliptique.*

Démonstration. — L'holomorphie découle de (cf. (7.8), (1.13), (1.16), (4.1)) :

$$\psi_j - il_0 = \int_y^x (g(\tilde{x}) - z)d\tilde{x} + \varphi_j(x, y) \tag{7.14}$$

ce qui est manifestement holomorphe en z, et ceci est préservé dans la méthode de la phase stationnaire.

Afin de simplifier les notations, nous introduisons les nouvelles variables

$$X = (x, y);\ \alpha = \Gamma_{-+}(z); \beta = (\rho, \nu)\ . \tag{7.15}$$

Nous étendons F de manière naturelle à $\alpha \in T^*(S^1) \times T^*(S^1)$ en considérant $\rho_+(z)$ et $\rho_-(z)$ comme des variables indépendantes dans (7.8), avec $\varphi_\pm$ dépendant de $\rho_\pm$.

Soient $\beta_0 = (\rho_j, \nu_j)$ et $X_{c,0} = (x_j, y_j)$. Pour $\alpha = \beta = \beta_0$, $X \to F(X, \beta_0, \beta_0)$ a un point critique non-dégénéré réel $X_{c,0}$:

$$F'_X(X_{c,0}, \beta_0, \beta_0) = 0\ ,$$
$$\operatorname{Im} F(X, \beta_0, \beta_0) \sim (X - X_{c,0})^2\ .$$

D'après le théorème des fonctions implicites, pour (α, β) dans un voisinage de (β_0, β_0), F aura un unique point critique non-dégénéré $X_c(\alpha, \beta)$ (qui dépendra de manière analytique de (α, β)) ; nous posons $\alpha = \Gamma_{-+}(z)$.

Nous avons alors le développement de la phase stationnaire analytique ([**10**]), ce qui donne (7.10).

Pour montrer (7.13), nous partons de l'inégalité fondamentale

$$\operatorname{Im} F(X_c(\alpha, \beta), \alpha, \beta) \geq \inf_{X \in vois_{\mathbb{R}}(X_{c,0})} \operatorname{Im} F(X, \alpha, \beta) + \frac{1}{C} |\operatorname{Im} X_c(\alpha, \beta)|^2 \tag{7.16}$$

(voir [**10**]). Dans notre cas, il existe un $C > 0$ tel que

$$\operatorname{Im} F(X, \alpha, \beta) \geq \frac{1}{C}((X - \alpha_X)^2 + (X - \beta_X)^2) \geq \frac{1}{C'}(\alpha_X - \beta_X)^2 \tag{7.17}$$

en désignant par α_X la projection de α sur la composante X. De plus,

$$|\operatorname{Im} X_c(\alpha, \beta)| \geq \inf_{X \in vois_{\mathbb{R}}(X_{c,0})} |F'_X|\ . \tag{7.18}$$

Pour minorer $|F'_X|$, soit $Y(\alpha, \beta)$ l'unique point dans un voisinage réel de $X_{c,0}$ tel que $X \to \operatorname{Im} F(X, \alpha, \beta)$ y atteint son minimum.

C'est un point critique non-dégénéré de $\operatorname{Im} F$, et donc

$$|\operatorname{Im} F'_X(X,\alpha,\beta)| \sim |X - Y(\alpha,\beta)| \ . \tag{7.19}$$

Ensuite, pour $\alpha_X = \beta_X$ nous avons

$$\operatorname{Re} F'_X(\alpha_X,\alpha,\beta) = \alpha_\Xi - \beta_\Xi \tag{7.20}$$

et donc

$$\operatorname{Re} F'_X(X,\alpha,\beta) = \alpha_\Xi - \beta_\Xi + O(|\alpha_X - \beta_X|) + O(|X - Y(\alpha,\beta)|) \ . \tag{7.21}$$

Nous avons au total

$$\begin{aligned} |F'_X|^2(X,\alpha,\beta) &\geq |\operatorname{Im} F'_X|^2(X,\alpha,\beta) + \frac{1}{C}|\operatorname{Re} F'_X|^2(X,\alpha,\beta) \\ &\geq \frac{1}{C'}|\alpha_\Xi - \beta_\Xi|^2 - \tilde{C}|\alpha_X - \beta_X|^2 + \frac{1}{C''}|X - Y(\alpha,\beta)|^2 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$|\operatorname{Im} X_c(\alpha,\beta)|^2 \geq \frac{1}{C}|\alpha_\Xi - \beta_\Xi|^2 - \tilde{C}|\alpha_X - \beta_X|^2 \ , \tag{7.22}$$

donc d'après (7.16), (7.17),

$$f(\alpha,\beta) = \operatorname{Im} F(X_c(\alpha,\beta),\alpha,\beta) \geq \frac{1}{C}|\alpha - \beta|^2 \tag{7.23}$$

qui est la minoration dans (7.13).

D'autre part, puisque $\operatorname{Im} F(X_c(\alpha,\beta),\alpha,\beta)$ est une fonction positive analytique s'annulant pour $\alpha = \beta$, nous avons

$$f(\beta,\alpha) = \operatorname{Im} F(X_c(\alpha,\beta),\alpha,\beta) \leq C|\alpha - \beta|^2 \ . \tag{7.24}$$

$\square$

Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Pi : \mathrm{vois}_{T^*(S^1)\times T^*(S^1)}(\Gamma_{-+}(\Omega)) &\to \Gamma_{-+}(\Omega) \\ (\rho,\nu) &\mapsto \Gamma_{-+}(Z(\rho,\nu)) \ . \end{aligned} \tag{7.25}$$

C'est une submersion idempotente.

Fixons un voisinage $W \subset T^*(S^1) \times T^*(S^1)$ de $\Gamma_{-+}(\Omega)$. Soit

$$J(W,\epsilon) = \{j; (\rho_j,\nu_j) \in W\} \ . \tag{7.26}$$

D'après l'observation précédant le lemme 7.2, on a

$$|\sum_{j\notin J(W,\epsilon)} u_j| = e^{-\frac{1}{Ch}} \tag{7.27}$$

pour h assez petit en fonction de ϵ, où C est indépendante de ϵ.

Hypothèse 3. — *Nous supposons que* $\forall j, k \in J(W, \epsilon)$

$$z_j \neq z_k \text{ si } j \neq k \ , \tag{7.28}$$

(ce qui implique que les minima des $\mathrm{Im}\,\Phi_j$ *sont distincts).*

De manière équivalente, $\Pi(\rho_j, \nu_j) \neq \Pi(\rho_k, \nu_k)$, pour $j, k \in J(W, \epsilon)$, $j \neq k$.

Remarquons que pour ϵ fixé, l'ensemble des (ρ_j, ν_j), $j = 1, ..., N(\epsilon)$, ne vérifiant pas cette hypothèse est une réunion de sous-variétés analytiques de codimension 2 de $(T^*(S^1) \times T^*(S^1))^{N(\epsilon)}$, ce qui implique que l'hypothèse est vérifiée génériquement.

Hypothèse 4. — *Soit* $\Gamma \subset\subset \overset{\circ}{\Sigma}$ *un ouvert simplement connexe de bord* $\gamma = \partial\Gamma \in C^\infty$. *Nous supposons alors que pour* $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$,

$$\Gamma_{-+}(\gamma) \subset \bigcup_{1 \leq j \leq N(\epsilon)} B\left(((x_j, \xi_j), (y_j, \eta_j)), \frac{\sqrt{\epsilon}}{C}\right) \ ,$$

où C *devra être choisi assez grand. De manière générale* $B(x_0, r)$ *désigne la boule ouverte de centre* x_0 *et de rayon* r.

Avec (7.13) et pour tous les j tels que dist $(\Gamma_{-+}(\gamma), (\rho_j, \nu_j)) \leq \frac{\sqrt{\epsilon}}{C}$, nous avons

$$\mathrm{Im}\,\Phi_j(z_j) \leq \frac{\epsilon}{4} \tag{7.29}$$

et dist $(z_j, \gamma) \leq \sqrt{\epsilon}$, si C est assez grand.

Hypothèse 5. — *Soit* $\delta = e^{-\frac{\epsilon}{h}}$ *avec*

$$\epsilon < \frac{1}{C} \text{ indépendant de } h, \tag{7.30}$$

où C *est assez grande pour que les conditions (c), (d) soient remplies.*

Pour h_0 assez petit (c'est à dire $h_0(4\ln(\frac{1}{h_0}) + \ln C') < \epsilon$) , les conditions (a) et (b) sont remplies pout tout $h \in (0, h_0]$.

En rassemblant les estimations, nous avons

Lemme 7.3. — *Pour* h *assez petit,*

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}} E_{-+}^\delta| \leq e^{\frac{Re\, l_0}{h}}, z \in \Omega \ . \tag{7.31}$$

Il existe $C > 0$ *et un recouvrement*

$$\gamma \subset \bigcup_{j \in J} B(\tilde{z}_j, C\sqrt{\epsilon}), \quad |J| = O(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}) \tag{7.32}$$

tel que

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}} E^\delta_{-+}|(\tilde{z}_j) \geq e^{\frac{Re\, l_0 - 2\epsilon}{h}} \quad \forall j \in J \tag{7.33}$$

pour h assez petit.

Démonstration. — D'après les lemmes (5.1), (7.1) nous avons

$$\begin{aligned} |e^{\frac{l^\delta}{h}} E^\delta_{-+}| &\leq \frac{\delta}{\sqrt{h}} |e^{\frac{l_0}{h}}|(|u(z)| + O(\frac{\delta}{h^{\frac{3}{2}}})) \\ &\leq e^{\frac{\mathrm{Re}\, l_0}{h}}(q(\epsilon)\frac{\delta}{\sqrt{h}} + O(\frac{\delta^2}{h^2})) \leq e^{\frac{\mathrm{Re}\, l_0}{h}} \ . \end{aligned} \tag{7.34}$$

Ensuite soit $J \subset \{1, ..., N(\epsilon)\}$ un ensemble tel que :

$$\gamma \subset \bigcup_{j \in J} D(z_j, C\sqrt{\epsilon}), \quad |J| = O(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}), \tag{7.35}$$

et

$$\mathrm{Im}\, \Phi_j(z_j) \leq \frac{\epsilon}{4} \ , j \in J \ . \tag{7.36}$$

Soit $\tilde{J}_j$ l'ensemble des k tels que $\phi_k(z_j)$ est bien-définie par le lemme 7.2, et soit

$$J_j = \{k \in \tilde{J}_j ; \mathrm{Im}\, \Phi_k(z_j) \leq \frac{\epsilon}{4}\} \ . \tag{7.37}$$

Alors dans tout voisinage de z_j, il existe un $\tilde{z}_j$ et il existe un $k_j \in J_j$ tels que

$$\mathrm{Im}\, (\Phi_k - \Phi_{k_j})(\tilde{z}_j) > 0 \quad \forall k \in J_j, k \neq k_j \ . \tag{7.38}$$

En fait, les $\mathrm{Im}\, \Phi_j$ sont analytiques avec des minima distincts, donc sur tout ouvert (non-vide) $\mathrm{Im}\, (\Phi_k - \Phi_j)$ ne peut être constant si $j \neq k$.

Choisissant $\tilde{z}_j$ assez près de z_j, nous avons le recouvrement (7.32) et

$$\mathrm{Im}\, \Phi_{k_j}(\tilde{z}_j) \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \forall j \in J \ . \tag{7.39}$$

Nous avons donc, d'après le lemme 7.2,

$$\begin{aligned} |u(\tilde{z}_j)| &\geq |u_{k_j}(\tilde{z}_j)|(1 - e^{-\frac{1}{C(\epsilon)h}}) \\ &\geq \sqrt{h} e^{-\frac{\epsilon}{2h}} \end{aligned}$$

pour ϵ assez petit, puis h assez petit en fonction de ϵ.

Au total nous avons alors, d'après le lemme 5.1,

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}} E^\delta_{-+}|(\tilde{z}_j) \geq \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} e^{\frac{\mathrm{Re}\, l_0}{h} - \frac{3\epsilon}{2h}}(1 - e^{-\frac{\epsilon}{2h} - \frac{h(4 \ln h + 2 \ln C)}{2h}}) > e^{\frac{\mathrm{Re}\, l_0}{h} - \frac{2\epsilon}{h}} \tag{7.40}$$

pour h assez petit ce qui termine la preuve. □

8. Zéros de E^{δ}_{-+} et fin de la preuve du théorème 2

Soit f une fonction holomorphe dans une domaine $\Omega \subset\subset \mathbb{C}$ et Γ un domaine de bord $\gamma = \partial\Gamma \in C^{\infty}$. Si γ n'intersecte pas de zéros de f, alors le nombre de zéros de f dans Γ est donné par

$$N(\Gamma, f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'}{f}\ . \tag{8.1}$$

Proposition 8.1. — *Soient Γ, γ et Ω comme ci-dessus.*
Soit

$$\phi \in C^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})\ , \tag{8.2}$$

soit f une fonction holomorphe dans Ω avec

$$|f(z;h)| \leq e^{\frac{\phi(z)}{h}},\ \forall z \in \Omega\ , \tag{8.3}$$

et nous supposons qu'il existe $z_j \in \Omega$, $0 < r_j, \epsilon_j \ll 1$, $j = 1, ..., N$ tels que

$$B(z_j, 3r_j) \subset \Omega \text{ et } \gamma \subset \bigcup_j B(z_j, r_j) \tag{8.4}$$

avec

$$|f(z_j;h)| > e^{\frac{1}{h}(\phi(z_j)-\epsilon_j)}\ . \tag{8.5}$$

Alors nous avons

$$N(\Gamma, f) = \frac{1}{2\pi h}\int_{\Gamma}\Delta\phi\mathcal{L}(dz) + \sum_j O(\frac{r_j^2+\epsilon_j}{h})\ . \tag{8.6}$$

Démonstration. — Si $f(z;h)$ a des zéros sur γ, on peut toujours perturber f arbitrairement peu (et essentiellement sans changer (8.3), (8.5)) pour envoyer ces zéros vers l'intérieur de Γ, ou vers l'extérieur. Il suffit alors de montrer (8.6) dans le cas où f n'a pas de zéros sur γ.

Nous décomposons γ en des courbes disjointes γ_j avec $\gamma_j \subset B(z_j, r_j)$ et travaillons pour chaque j avec $z \in B(z_j, 3r_j)$.

Soit

$$i\varphi_j(z) := \phi(z_j) + 2\partial_z\phi(z_j)(z - z_j) \tag{8.7}$$

qui est manifestement holomorphe en z.

Alors

$$\phi(z) = \mathrm{Re}\, i\varphi_j(z) + R_j(z) \tag{8.8}$$

avec $R_j(z) = O(|z - z_j|^2)$.

De plus

$$\varphi_j'(z) = \partial_z\varphi_j(z) = \frac{2}{i}\partial_z\phi(z_j) = \frac{2}{i}\partial_z\phi(z) + O(r_j) \ . \tag{8.9}$$

Soit ensuite

$$v_j(z;h) := f(z;h)e^{-\frac{i}{h}\varphi_j(z)} \tag{8.10}$$

qui est manifestement holomorphe. Les hypothèses du théorème deviennent

$$|v_j(z;h)| \leq e^{\frac{Cr_j^2}{h}} \ ,$$
$$|v_j(z_j;h)| \geq e^{\frac{-\epsilon_j - Cr_j^2}{h}} \ .$$

La formule de Jensen (voir par exemple [**14**]) nous donne une borne du nombre de zéros dans le disque de rayon $\frac{R}{2}$ d'une fonction g holomorphe dans le disque de rayon R :

$$N(D(0,\frac{R}{2}),g)\ln 2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(Re^{i\theta})|d\theta - \ln|g(0)| \ . \tag{8.11}$$

Ceci nous donne alors (avec $R = 3r_j$)

$$N(D(z_j,\frac{3}{2}r_j),v) \leq \frac{\tilde{C}(r_j^2+\epsilon_j)}{h} \ . \tag{8.12}$$

Nous effectuons un changement de coordonnées holomorphe (en omettant les indices)

$$w := \frac{z - z_j}{r_j} \ , \tag{8.13}$$

et soit $\tilde{v}(w) = v(z)$. Nous décomposons $\tilde{v}$ dans $D(0,\frac{3}{2})$:

$$\tilde{v}(w) = g(w)\prod_{1\leq k\leq N}(w - w_k) \ , \tag{8.14}$$

où w_k sont les zéros de $\tilde{v}$ dans $D(0,\frac{3}{2})$ et g est une fonction holomorphe dans $D(0,\frac{3}{2})$.

Nous allons montrer qu'il existe un $r \in (\frac{4}{3},\frac{3}{2}]$ tel que, pour $|w| = r$ nous avons

$$\prod_{k=1}^{N}|w - w_k| \geq e^{-NC} \ . \tag{8.15}$$

Avec le principe du maximum et (8.12), pour $|w| \leq r$ ceci implique

$$|g(w)| \leq |\tilde{v}(w)|e^{NC} \leq e^{\frac{C(r_j^2+\epsilon_j)}{h}} ,$$
$$|g(0)| \geq |\tilde{v}(0)|2^{-N} \geq e^{\frac{-C(r_j^2+\epsilon_j)}{h}} .$$

Pour montrer (8.15) (d'après [**12**]), nous avons

$$|w - w_k| \geq ||w| - |w_k|| . \tag{8.16}$$

Soit alors, pour $x, x_k \in \mathbb{R}$, $F(x) := -\sum_{1\leq k\leq N} \ln|x - x_k|$. Avec

$$-\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}} \ln|x - x_k|dx \leq -2\int_0^{\frac{1}{12}} \ln t dt \leq \tilde{C} \tag{8.17}$$

nous avons

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{3}{2}} F(x)dx \leq N\tilde{C} \tag{8.18}$$

et donc $\exists x \in (\frac{4}{3}, \frac{3}{2})$ tel que $F(x) \leq NC$, ce qui prouve l'affirmation.

Comme g est holomorphe et non-nulle, $\ln|g|$ est une fonction harmonique.

De plus, $\frac{C(r_j^2+\epsilon_j)}{h} - \ln|g| \geq 0$ donc les inégalités de Harnack nous donnent sur un disque au rayon diminué (on pourra choisir $r = \frac{5}{4}$)

$$-\frac{C'(r_j^2+\epsilon_j)}{h} \leq \ln|g| \leq \frac{C(r_j^2+\epsilon_j)}{h} . \tag{8.19}$$

Comme $\ln|g|$ est harmonique, on trouve après avoir diminué r légèrement :

$$\nabla \ln|g|(w) \leq \frac{C(r_j^2+\epsilon_j)}{h} , |w| \leq 1 . \tag{8.20}$$

Ceci implique que (étant donné que g est holomorphe et non-nulle)

$$\partial_w \ln g(w) = \frac{(\partial_w g)\overline{g}}{|g|^2} = \frac{\partial_w |g|^2}{|g|^2} = 2\partial_w ln|g| = O(\frac{r_j^2+\epsilon_j}{h}) . \tag{8.21}$$

Avec $|\gamma_j| = O(r_j)$ nous avons, avec $\tilde{\gamma}_j$ désignant l'image de γ_j dans le plan des w,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{f'}{f}dz &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\gamma_j}\varphi_j'(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_j}\frac{v_j'}{v_j}dz \\ &= \frac{1}{2\pi h}\int_{\gamma_j}\frac{2}{i}\partial_z\phi(z)dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_j}\left(\partial_w \ln g(w) + \sum_{1\leq k\leq N}\partial_w\ln(w-w_k)\right)dw + O(\frac{r_j^2}{h})\ . \end{aligned}$$

Pour estimer la contribution des derniers termes, nous remarquons d'abord que nous pouvons prendre la partie réelle étant donné que N est réel. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}_j}\partial_w\ln(w-w_k)dw &= \frac{1}{2\pi}\int_{\tilde{\gamma}_j}d\mathrm{Im}\ \ln(w-w_k) \\ &= var\ arg_{\tilde{\gamma}_j}(w-w_k)\ . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Etant donné que $\tilde{\gamma}_j$ est très proche d'une droite, cette variation sera bornée par 2π et donc

$$\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\sum_{1\leq k\leq N}\int_{\tilde{\gamma}_j}\partial_w\ln(w-w_k)dw \leq O(N)\leq O(\frac{r_j^2+\epsilon_j}{h})\ . \tag{8.23}$$

Nous avons alors au total, en utilisant aussi (8.21) :

$$N(\Gamma,f) = \mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi h}\int_{\gamma}\frac{2}{i}\partial_z\phi(z)dz + \sum_j O(\frac{r_j^2+\epsilon_j}{h})\ . \tag{8.24}$$

Nous appliquons le théorème de Stokes au premier terme (avec la convention d'orientation standard $\frac{1}{2i}d\overline{z}\wedge dz = \mathcal{L}(dz)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$) et obtenons

$$N(\Gamma,f) = \frac{1}{2\pi h}\mathrm{Re}\int_{\Gamma}\Delta\phi\mathcal{L}(dz) + \sum_j O(\frac{r_j^2+\epsilon_j}{h}) \tag{8.25}$$

ce qui prouve la proposition. □

Preuve du théorème 2. — Appliquons la proposition à $f = e^{\frac{l^\delta}{h}}E_{-+}^\delta$ pour laquelle le lemme 7.3 donne les estimations requises avec $r_j^2 = C\epsilon$, $\epsilon_j = 2\epsilon$, et $N(\epsilon) \sim O(\frac{1}{\sqrt{\epsilon}})$, et nous utilisons aussi (4.2) :

$$N(\Gamma, E^\delta_{-+}) = \frac{1}{2\pi h}\int_\Gamma \Delta \mathrm{Re}\, l_o(z)\mathcal{L}(dz) + \sum_j O(\frac{r_j^2+\epsilon_j}{h}) \tag{8.26}$$
$$= \frac{1}{2\pi h}|\Gamma_{-+}(\Gamma)| + O(\frac{\sqrt{\epsilon}}{h}) \ .$$

□

9. Preuve du théorème 1

Nous terminons par prouver le théorème 1 à l'aide de la proposition 6.1 et du lemme 7.2.

Nous supposons de nouveau (c) et (d).

En utilisant le lemme 5.1, nous avons :

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}}E^\delta_{-+}| \geq h^{-\frac{1}{2}}\delta|e^{\frac{l_0}{h}}u(z)| - C|e^{\frac{l_0}{h}}|\frac{\delta^2}{h^2} \ . \tag{9.1}$$

On voit que le lemme 7.2 s'applique dans la nouvelle situation et nous obtenons, avec C_φ définie dans (6.14) :

$$|e^{\frac{l^\delta}{h}}E^\delta_{-+}| \geq \delta e^{\frac{-\mathrm{Re}\, l_0}{h}}(\sqrt{h}e^{-\sim \mathrm{dist}\,(\Gamma_{-+}(z),C_\varphi)^2} - e^{-\frac{\epsilon}{h}-\frac{2h\ln h - h\ln C}{h}}) \ , \tag{9.2}$$

ce qui est strictement positif pour

$$\epsilon - C'\mathrm{dist}\,(\Gamma_{-+}(z),C_\varphi)^2 \gg h(\ln C + 3h\ln\frac{1}{h}) \ , \tag{9.3}$$

donc dans V_ϵ. □

Références

[1] S. Agmon, lectures on elliptic boundary value problems, van nostrand mathematical studies, Van Nostrand (1965), princeton

[2] N. Burq, M. Zworski, Resonance Expansion in Semi-Classical Propagation, Commun. Math. Phys. 223 (2001), 1-12

[3] E.B. Davies, Semiclassical states for Non-Self-Adjoint Schrödinger Operators, Commun. Math. Phys. 200 (1999), 35-41

[4] E.B. Davies, Pseudospectra of differential operators, J.Operator theory 43 (2000), 243-262

[5] E.B. Davies, Semigroup growth bounds, preprint, http ://xxx.lanl.gov/abs/math.SP/0302144

[6] L. Hörmander, The analysis of Linear Partial Differential Operators vols. 1-3, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256, 257, 274, Springer-Verlag (1983-1985), Berlin

[7] S. Reddy, P. Schmid, D. Henningson, Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator, Siam J. Appl. Math. 53 (1993), 15-45

[8] J. Sjöstrand , A. Grigis, Microlocal Analysis for Differential Operators, LMS LN 196, Cambridge University press (1994)

[9] J. Sjöstrand, M. Dimassi, Spectral Asymptotics in the Semi-Classical Limit, LMS LN 268, Cambridge University press (1999)

[10] J. Sjöstrand, Singularités analytiques microlocales, Astérisque 95 (1982)

[11] J. Sjöstrand, M. Zworski, N. Dencker, Pseudospectra of semiclassical (pseudo-) differential operators, Comm. Pure Appl. Math. 57 (2004), 384-415

[12] J. Sjöstrand, Lectures on resonances, http ://daphne.math.polytechnique.fr/˜ sjoestrand/

[13] S.H. Tang, M. Zworski, Resonance expansion of scattered waves, Comm. Pure Appl. Math. 53 (2000), 1305-1334

[14] E.C. Titchmarsh, The theory of functions, Oxford University Press (1939), Oxford

[15] L.N. Trefethen, Pseudospectra of matrices, Numerical Analysis (1991), 234-266

[16] L.N. Trefethen, Pseudospectra of linear operators, SIAM rev. 39 (1997), 383-406

[17] L.N. Trefethen, Wave packet Pseudomodes of variable coefficient differential operators, preprint (2004)

[18] M. Zworski, A remark on a paper of E.B. Davies , Proceedings of the AMS 129 (1999), 2955-2957

[19] M. Zworski, Numerical linear algebra and solvability of partial differential equations, Comm. Math. Phys. 229 (2002), 293-307

, CMLS, Ecole polytechnique, 91128 Palaiseau Cédex, France, UMR 7640
E-mail : `mildred.hager@math.polytechnique.fr`